Prova Scritta di Ricerca Operativa

(Prof. Fasano Giovanni)

Università Ca'Foscari Venezia - Sede di via Torino

6 maggio 2025

Regole per l'esame: la violazione delle seguenti regole comporta il ritiro dell'elaborato e l'allontanamento dello studente dall'aula

- È necessario rispondere alle domande e risolvere gli esercizi usando **esclusivamente** i fogli distribuiti dal docente.
- Ogni risposta/calcolo deve essere opportunamente **motivata/o** dallo studente.
- Il **tempo complessivo** per la prova è di
  - **1h 25'** : per gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia;
  - **1h 50'** : per gli studenti che NON hanno superato la Prova Intermedia.
- È necessario **risolvere** gli esercizi e **rispondere** alle domande, secondo le seguenti modalità:
  - gli studenti che hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **solo** gli/alle esercizi/domande con **(***)**;
  - gli studenti che **NON** hanno superato la Prova Intermedia devono risolvere/rispondere **tutti** gli/le esercizi/domande;

È **vietato** parlare durante la prova. È **vietato** usare durante la prova: testi, appunti, note, dispense, dispositivi cellulari, tablets, palmari, calcolatori/calcolatrici programmabili. Durante la prova **non è possibile** allontanarsi dall'aula.

Nome: . . . .

Cognome: . . . .

Matricola: . . . .

Considerare la Prova Intermedia: SI NO

Esercizio 1

Si consideri la funzione *lineare* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e la funzione *affine* $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, con $p \neq n$. Sia dato l'insieme $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^p \ : \ -1 \leq f(x) \leq 1,\ -3 < g(y) \leq 2\}$. Si dica (dimostrandolo) se l'insieme $\mathcal{L}$ è convesso. Inoltre si dica se tale insieme risulta essere un poliedro e/o un polìtopo.

SOLUZIONE:

Ogni funzione lineare risulta anche affine e di conseguenza i suoi insiemi di livello sono convessi, con $f(x) = c^T x$, $c \in \mathbb{R}^n$, e $g(y) = d^T y + e$, $d \in \mathbb{R}^p$, $e \in \mathbb{R}$. Dal momento che $\mathcal{L}$ risulta l'intersezione dei quattro insiemi (convessi) $\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p \ : \ f(x) \leq 1\}$, $\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p \ : \ -f(x) \leq 1\}$, $\mathcal{L}_3 = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p \ : \ g(y) \leq 2\}$, $\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p \ : \ -g(y) < 3\}$ (dove le funzioni $f(x)$, $-f(x)$, $g(y)$ e $-g(y)$ risultano affini e quindi convesse), allora $\mathcal{L}$ risulta senz'altro convesso.

Infine, si osservi che $\mathcal{L}$ potrebbe NON essere un poliedro (in quanto risulta presente un vincolo di disuguaglianza stretta). Inoltre, se anche lo fosse, potrebbe NON essere limitato, come il semplice contro-esempio seguente mostra: $f(x) = 0^T x$ e $g(y) = 0^T y + 1$.

Esercizio 2 (***)

Considerato il piano ferie di agosto dei propri dipendenti, un'impresa nella prima settimana di agosto deve ri-assegnare (i.e. chiamare) 110 dipendenti nei diversi uffici, pianificando le assegnazioni in ciascun giorno della predetta settimana. Il costo (Euro/giorno) di un dipendente è (per ciascun giorno della settimana): 50 (L), 70 (Ma), 80 (Me), 90 (G), 60 (V), 55 (S) e 75 (D). Se si chiamano dipendenti il Me o il G, l'impresa deve pagare un costo fisso forfettario di 2000 Euro (per entrambi i giorni) per contributi INPS. Il numero complessivo di dipendenti chiamati L, Ma e Me deve essere almeno il 60% del numero di dipendenti chiamati complessivamente G e V. Il numero complessivo di dipendenti chiamati nei primi 5 giorni della settimana non può superare le 82 unità. Inoltre si hanno anche i seguenti vincoli:

1. i dipendenti chiamati G e V non possono complessivamente eccedere la metà dei dipendenti chiamati S;
2. il numero complessivo di dipendenti chiamati nei giorni dispari (L, Me, V, D) non può essere inferiore di almeno 5 unità al numero complessivo di dipendenti chiamati nei giorni pari (Ma, G, S);
3. il numero di dipendenti chiamati L deve essere almeno il 25% dei dipendenti chiamati la D;
4. in uno ed un solo giorno della settimana in esame l'impresa rimane chiusa e i dipendenti non vengono chiamati.

Formulare un modello di PL/PLI per la minimizzazione dei costi di chiamata dei dipendenti, nell'arco della settimana in esame.

SOLUZIONE:

$$x_i = \text{numero di dipendenti chiamati nell'}i\text{-simo giorno della settimana } (i = L, \ldots, D)$$

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se si chiamano dipendenti Me o G} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se si chiamano dipendenti nel giorno } i\text{−simo } i = L, \ldots, D \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\min \quad 50x_L + 70x_{Ma} + 80x_{Me} + 80x_G + 60x_V + 55x_S + 75x_D + 2000y$$

$$\begin{aligned}
& x_L + x_{Ma} + x_{Me} \geq 0.6(x_G + x_V) \\
& x_i \leq 110, \qquad i = L, \ldots, D \\
& \sum_{i=L}^{V} x_i \leq 82 \\
& x_G + x_V \leq 0.5x_S \\
& x_L + x_{Me} + x_V + x_D \geq 5 + x_{Ma} + x_G + x_S \\
& x_L \geq 0.25x_D \\
& x_i \leq z_i \cdot M, \qquad M \gg 1, \qquad i = L, \ldots, D \\
& \sum_{i=L}^{D} z_i = 6 \\
& y \geq \frac{x_{Me} + x_G}{M} \\
& x_i \geq 0, \qquad i = L, \ldots, D, \text{ intera.}
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Si determini il numero massimo (possibile) di vertici del seguente poliedro. Successivamente, si determinino tali vertici (se esistono).

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 \leq 7 \\ x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_2 - x_4 \geq 3 \\ x_1 - x_4 \leq 12 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Preventivamente possiamo sostituire $x_2 = 3$ in tutte le disequazioni, ottenendo il poliedro equivalente

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 \leq 7 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 \geq 2 \\ -x_4 \geq 0 \\ x_1 - x_4 \leq 12. \end{cases}$$

Essendo ora $n = 3$ ed $m = 4$, il massimo numero di vertici del poliedro sarà non superiore a

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{4!}{3!} = 4.$$

Basterà pertanto considerare i seguenti 4 sistemi di uguaglianze:

(I) in cui

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

il quale soddisfa anche il quarto vincolo e si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Pertanto il punto P_1 **è un vertice del poliedro**.

(II) in cui

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_4 = 12 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix},$$

il quale soddisfa anche il terzo vincolo, e si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Pertanto il punto P_2 **è un vertice del poliedro**.

(III) in cui

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 7 \\ -x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 12 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

il quale soddisfa anche il secondo vincolo e si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Pertanto il punto P_3 **è un vertice del poliedro**.

(IV) in cui

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ -x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 12 \end{cases}$$

che fornisce il punto

$$P_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix},$$

il quale NON soddisfa anche il primo vincolo, pertanto il punto P_4 **NON è un vertice del poliedro**.

$\boxed{\text{Esercizio 4}}$ (***)

Si consideri il seguente esercizio di Knapsack binario in $\mathbb{R}^6$. Si giustifichi preliminarmente il fatto che ammette soluzione, poi si trovi quest'ultima con il metodo del B&B.

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \ \le\ 2 \\ & x \in \{0,1\}^6. \end{array} \qquad (P_0)$$

SOLUZIONE:

In (P_0) possiamo senz'altro assegnare facilmente il valore di alcune variabili (i.e. $x_2 = 1 - y_2$, $y_2 \in \{0,1\}$, in quanto è presente con segno negativo sia nella funzione obiettivo che nel vincolo; $x_4^* = 1$, in quanto ha segno negativo nel vincolo e segno positivo nella funzione obiettivo; $x_6^* = 0$, in quanto ha segno positivo nel vincolo e coefficiente nullo nella funzione obiettivo), ottenendo in particolare il problema equivalente

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + y_2 + x_3 + 2x_5 \\ & x_1 + 2y_2 + 3x_3 + x_5 \ \le\ 5 \\ & x_1, y_2, x_3, x_5 \in \{0,1\}. \end{array} \qquad (\tilde{P}_0)$$

Quest'ultimo problema ammette la soluzione (ammissibile) intera corrente $\hat{x} = 0$, con $f(\hat{x}) = 0$. Creiamo la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{(\tilde{P}_0)\}$ ed estraiamone l'unico problema $(\tilde{P}_0)$. Consideriamo il suo rilassamento lineare, si provvede ora ad ordinare in modo decrescente i rapporti dei coefficienti delle restanti 4 variabili (x_1, y_2, x_3 e x_5), i.e.

$$\frac{3}{1} \ \ge\ \frac{2}{1} \ \ge\ \frac{1}{2} \ \ge\ \frac{1}{3},$$

e di conseguenza si passa a risolvere (riordinando le variabili) il problema rilassato

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_5 + y_2 + x_3 \\ & x_1 + x_5 + 2y_2 + 3x_3 \ \le\ 5, \\ & 0 \le x_1, y_2, x_3, x_5 \le 1. \end{array}$$

Essendo $h = 3$, risulta per la soluzione rilassata di $(\tilde{P}_0)$

$$x_1^{(0)} = 1,\ x_5^{(0)} = 1,\ y_2^{(0)} = 1,\ x_3^{(0)} = \frac{5 - (1 + 1 + 2)}{3} = 1/3,$$

cui corrisponde un valore della funzione obiettivo superiore al valore $f(\hat{x})$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{P}_0)$, effettuiamo un *Branching* e dividiamo $(\tilde{P}_0)$ nei 2 sottoproblemi (settando rispettivamente $x_3 = 0$ e $x_3 = 1$)

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_5 + y_2 \\ & x_1 + x_5 + 2y_2 \ \le\ 5 \\ & x_1, y_2, x_5 \in \{0,1\}, \end{array} \qquad (\tilde{P}_1)$$

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_5 + y_2 + 1 \\ & x_1 + x_5 + 2y_2 \ \le\ 2 \\ & x_1, y_2, x_5 \in \{0,1\}, \end{array} \qquad (\tilde{P}_2)$$

ed aggiorniamo la lista $\mathcal{L} = \{(\tilde{P}_1), (\tilde{P}_2)\}$. Estraiamo il primo problema che ammette la soluzione rilassata (coincidente con una soluzione intera) $x^{(1)} = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)^T$ con $f(x^{(1)}) = 6$. Pertanto chiudiamo $(\tilde{P}_1)$ ed aggiorniamo $\hat{x} = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)^T$, con $f(\hat{x}) = 6$. Poi estraiamo da $\mathcal{L}$ anche $(\tilde{P}_2)$ che ammette anch'esso soluzione rilassata coincidente con una soluzione intera, data da $x^{(2)} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0)^T$, con $f(x^{(2)}) = 6$. Pertanto chiudiamo anche $(\tilde{P}_2)$ ma senza aggiornare di nuovo l'ottimo corrente $\hat{x}$. Per la soluzione finale si ha

$$x^* = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)^T.$$

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 1}}$

Si dimostri che la somma di funzioni affini è convessa. Inoltre si trovi un esempio di funzione *concava* che non risulti affine.

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 2}}$ (***)

Si consideri un problema di PL in cui la regione ammissibile è un polìtopo. Si dimostri che tale problema ammette regione ammissibile non vuota *se e solo se* il problema ammette soluzione ottima in almeno un suo vertice.

$\boxed{\textbf{Domanda Scritta 3}}$ (***)

Dato il problema di ottimizzazione

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b} c^T x,$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, si calcoli il gradiente della funzione obiettivo e si dimostri che tale gradiente: (1) è ortogonale alle curve di livello della funzione obiettivo, (2) è orientato nel verso crescente della funzione obiettivo.